第11講　組合せ

§1 組合せ

要点整理 と 公式

要点 1 組合せ

「組合せ」… いくつかのものから，取り出す順序を無視して取り出して組にしたもの

4個の文字 a，b，c，d から異なる3個を選ぶ組合せは

$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$ の 4 通りである。

このように，異なる n 個のものから，異なる r 個を取る組合せを，

「n 個のものから r 個取る組合せ」といい，その総数を「　　　」で表す。

上の総数は ${}_4C_3$ と表され，${}_4C_3=4$　である。

この組合せを計算で求める方法を，「順列」を用いて考える。

4個の文字 a，b，c，d から異なる 3 個を選んで並べる順列は

${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$（通り）である。

一方でこの順列は，4 個の文字 a，b，c，d から異なる 3 個を選び，その選んだ 3 個の順列を考えることで求めることができる。

4 個の文字 a，b，c，d から異なる 3 個を選ぶ組合せは ${}_4C_3=4$（通り）であり，

選んだ異なる 3 個の文字の順列は＿＿＿＿（通り）である。

よって，4 個の文字 a，b，c，d から異なる 3 個を選んで並べる順列は

${}_4C_3\times$＿＿＿＿$=4\times6=24$（通り）である。

以上より，求めた順列について＿＿＿＿＿＿＿＿が成り立つ。

よって，　　　　　　　　　　　　　である。この式から，組合せ ${}_4C_3$ を求めるとき，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

順列 ${}_4P_3$ において，組合せとして同じものが 3! 通りずつあるので，3! で割ったとみることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

■ 組合せの総数　${}_nC_r$

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1} $$

※$0! = 1$，${}_nP_0 = 1$ と定めると，この等式は $r=0$ のときも成り立ち，${}_nC_0 = \frac{{}_nP_0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ である。

また，${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ より，${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ と表すことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

(1)　次の値を求めよ。

(i)　${}_8C_3$　　(ii)　${}_6C_4$　　(iii)　${}_5C_1$

(2)　次のものの総数を求めよ。

(i)　10 人の生徒から 4 人を選ぶときの選び方

(ii)　正六角形の 6 個の頂点のうち，3 点を結んでできる三角形

Point Pickup

組合せの総数

「　　　　　」n 個のものから r 個のものを選ぶ組合せの総数は

$$______ = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

組合せは，選ぶ順序は考えない。

選ぶものと，選ばないもの

n 個のものから r 個のものを選ぶことは，選ばない$(n-r)$個を決める

ことと同じである。よって

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

r が「n の＿＿＿＿＿＿＿＿」ときに有効である。

$${}_5C_3 = {}_5C_{5-3} = {}_5C_2 = 10$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 組合せの利用

要点整理 と 公式

要点❷ どの組からいくつ取るか

男子 5 人，女子 4 人の合計 9 人から 3 人選ぶとき，その選び方は

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿である。

これは，選ぶ 3 人を「男子，女子に関係なく」選ぶ場合である。

男子 5 人から 2 人，女子 4 人から 1 人を選んで，合計 3 人の組を作るときの作り方の総数は

　男子 5 人から 2 人選ぶ方法は＿＿＿通り

　女子 4 人から 1 人選ぶ方法は＿＿＿通り

よって，積の法則により＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿である。

これは，男子の組，女子の組から「それぞれ何人選ぶか」が指定されている場合で，男子の選び方のそれぞれに対して，女子の選び方があるので，積の法則で計算できる。

このように，「どの組からいくつ取るか」が明確になっていれば，それぞれの組における組合せを考え，積の法則により求めることができる。

また，「どの組からいくつ取るか」が明確になっていない場合，必要に応じてそれを自分で決めることによって求めることができる。

男子 5 人，女子 4 人の合計 9 人から 3 人選ぶとき，その 3 人の男女の区別は以下。

① 男子 3人

② 男子 2人，女子 1人

③ 男子 1人，女子 2人

④ 　　　　　女子 3人

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①のとき　${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

②のとき　40 通り

③のとき　${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=30$（通り）

④のとき　${}_4C_3={}_4C_1=4$（通り）

①～④より，和の法則から　$10+40+30+4=84$（通り）　となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

男子７人，女子５人の中から３人を選ぶとき，次のような選び方はそれぞれ何通りあるか。

(1)　男女問わず３人選ぶ。

(2)　男子１人，女子２人を選ぶ。

(3)　男子が少なくとも１人含まれるように選ぶ。

Point Pickup

「少なくとも～である」場合の数

$\Longrightarrow$　(全体の総数)－(～ではない場合の数の総数)

少なくとも２個以上の偶数が含まれる。

$\Longrightarrow$　(全体の総数)－(＿＿＿＿＿＿＿＿)

　＝(全体の総数)－(＿＿＿＿＿＿＋＿＿＿＿＿＿)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 組分け

要点整理 と 公式

要点3 組に分ける

6人の生徒を A，B，C の 3 つの組に 2 人ずつ分けることを考える。

A に入る 2 人を選ぶ方法は＿＿＿通り

B に入る 2 人を，残り＿＿＿から選ぶ方法は＿＿＿通り

C に入る 2 人は，残った 2 人である。

よって，分け方の総数は，積の法則より

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿…①

ここで，6 人の生徒を 3 つの組に 2 人ずつ分けることを考えたとき，①の結果とは異なる。

6 人の生徒を a，b，c，d，e，f としたとき，その組分けの例として

$\{a,\ b\}$，$\{c,\ d\}$，$\{e,\ f\}$

がある。

この 3 つの組に A，B，C の名前をつける方法は，「　　　　」を用いると＿＿＿通りある。

これは，他の分け方についても同様である。

よって，①の＿＿＿通りには，A，B，C の区別をなくすと同じ分け方になるものが＿＿＿通りずつ存在する。

$\{a,\ b\}$	$\{c,\ d\}$	$\{e,\ f\}$	
A	B	C	3! 通り
A	C	B	
B	A	C	
B	C	A	
C	A	B	
C	B	A	

よって，分け方の総数は＿＿＿＿（通り）

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

異なる9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，Cの3人に3個ずつ分ける。

(2) 3個ずつ3つの組に分ける。

(3) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

Point Pickup

組分けの基本

$\Longrightarrow$ 分けるものがすべて区別されているときの組分けにおいて，

「個数が同じで区別できない」組が n 組あれば，

名前をつけて組分けし，その後に「　　　　　　」。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 同じものを含む順列

要点整理 と 公式

要点 4 同じものを含む順列

a，a，b の3個の文字の順列を考える。

2つの a を区別するために，a_1，a_2とすると，

a_1，a_2，b の3個の文字の順列は 3！通りある。

ここで，a_1，a_2 の区別をなくすと，同じ順列になるものが ＿＿ 通りある。

よって，順列の総数は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。

a_1a_2b，a_2a_1b ともに ＿＿

a_1ba_2，a_2ba_1 ともに ＿＿

ba_1a_2，ba_2a_1 ともに ＿＿

一般に次のことがいえる。

■ 同じものを含む順列の総数

aが ＿＿ 個，bが ＿＿ 個，cが ＿＿ 個，合計 n 個あるとき，それら全部の順列の総数は

$$\frac{n!}{\quad!\quad!\quad!}$$

また，a，a，b の順列は，右のように①，②，③の場所を用意し，a，a，b を入れる場所を「組合せ」を用いて「選ぶ」ことで求めることができる。

①	②	③

2つの a を入れる場所を①～③の 3 箇所から 2 箇所選ぶ方法は　${}_3C_2$　通り

残った場所に b を入れればよい。

よって，順列の総数は　${}_3C_2=3$（通り）　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

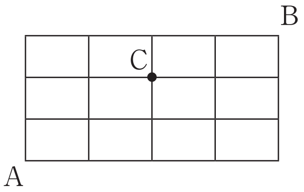
(1)　1，1，1，2，2，3 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。

(2)　右の図は，ある町の道を直線で表したものである。

次のそれぞれで，遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。

(i)　AからBまで行く。

(ii)　AからCを通ってBまで行く。



Point Pickup

同じものを含む順列

①　公式 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$　　②　組合せを用いて，同じものが入る場所を選ぶ。

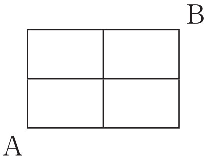
最短経路の総数

右図で，右に1区画進むことを→，

上に1区画進むことを↑で表すと，

AからBまでの最短経路の総数は

→2 個と↑2 個，合計 4 個の「　　　　」で求めることができる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1 8 個の異なる球から 5 個選ぶ選び方は ${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}}=\boxed{ウエ}$（通り）である。

8 個の異なる球から 5 個選ぶことは，選ばない $\boxed{オ}$ 個を決めることと同じである。

よって ${}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{イ}}={}_{\boxed{ア}}\mathrm{C}_{\boxed{オ}}$ である。

2 男子 5 人，女子 4 人の中から男子 2 人，女子 1 人を選ぶ方法は $\boxed{カキ}$ 通りある。また，この 9 人から 3 人選ぶとき，少なくとも女子が 1 人選ばれる場合の数は $\boxed{クケ}$ 通りある。

3 異なる 6 個の玉を分けるとき，A，B，Cの 3 人に 2 個ずつ分ける方法は $\boxed{コサ}$ 通りである。

$\boxed{コサ}$ 通りの中にはA，B，Cの区別をなくすと同じ分け方になるものが $\boxed{シ}!$ 通りある。よって，異なる 6 個の玉を 2 個ずつ 3 つの組に分ける方法は $\boxed{スセ}$ 通りある。

4 a，a，a，b，c の 5 個の文字をすべて使ってできる文字列は $\boxed{ソタ}$ 通りある。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　組合せ

1

(1)　(i)　$_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$　　(ii)　$_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　　(iii)　$_5C_1=5$

(2)　(i)　$_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$(通り)

(ii)　求める三角形の個数は，異なる6個から3個を取る組合せの総数である。

よって　$_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$(通り)

2

(1)　$_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$(通り)

(2)　男子の選び方は　$_7C_1$　通り，女子の選び方は　$_5C_2$　通りある。

よって，求める選び方は　$_7C_1\times{}_5C_2=7\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=70$(通り)

(3)　男子が1人も選ばれないのは，女子5人から3人を選ぶときで　$_5C_3$　通り

よって，求める場合の数は　$220-{}_5C_3=220-\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=210$(通り)

3

(1)　9個の玉をA，B，Cの3人に3個ずつ分けるときの分け方の総数は，積の法則より

$$_9C_3\times{}_6C_3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=1680(\text{通り})$$

(2)　(1)の分け方で，同じ個数の組A，B，Cの区別をなくすと，同じ分け方になるものが3!通りずつ存在する。

よって，分け方の総数は　$\dfrac{1680}{3!}=\dfrac{1680}{6}=280$(通り)

(3)　9個の玉をA，B，C，Dの4組にそれぞれ2個，2個，2個，3個ずつ分けるときの分け方の総数は，積の法則より　$_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2$　通り

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

この分け方で，同じ個数の組A，B，Cの区別をなくすと，同じ分け方になるものが3!

通りずつ存在する。

よって，分け方の総数は $\dfrac{{}_9C_2\times{}_7C_2\times{}_5C_2}{3!}=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}\times\dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\times\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times\dfrac{1}{6}=1260$（通り）

4

(1) $\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}=60$（個）

（別解） 3個の1が入る位の決め方は ${}_6C_3$ 通り

残りの位において，2 個の 2 が入る桁の決め方は ${}_3C_2$ 通り

3 は残った位に入る。

よって，求める総数は ${}_6C_3\times{}_3C_2=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\times\dfrac{3\cdot 2}{2\cdot 1}=60$（個）

(2) 右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す。

(i) AからBに行くときの道順は，→4 個と↑3 個，合計 7 個の順列で表される。

よって，求める道順の総数は $\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$（通り）

(ii) AからCまで行く道順は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，CからBまで行く道順は $\dfrac{3!}{2!}$ 通り

よって，求める道順の総数は，積の法則より $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}=6\times 3=18$（通り）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1 8 個の異なる球から 5 個選ぶ選び方は $_{\boxed{ア}}C_{\boxed{イ}}=$ ウエ (通り) である。
8 個の異なる球から 5 個選ぶことは，選ばない オ 個を決めることと同じである。
よって $_{\boxed{ア}}C_{\boxed{イ}}={}_{\boxed{ア}}C_{\boxed{オ}}$ である。

2 男子 5 人，女子 4 人の中から男子 2 人，女子 1 人を選ぶ方法は カキ 通りある。また，この 9 人から 3 人選ぶとき，少なくとも女子が 1 人選ばれる場合の数は クケ 通りある。

3 異なる 6 個の玉を分けるとき，A，B，Cの 3 人に 2 個ずつ分ける方法は コサ 通りである。
コサ 通りの中にはA，B，Cの区別をなくすと同じ分け方になるものが シ！ 通りある。よって，異なる 6 個の玉を 2 個ずつ 3 つの組に分ける方法は スセ 通りある。

4 a，a，a，b，c の 5 個の文字をすべて使ってできる文字列は ソタ 通りある。

{ 解答 }

1	ア　8	イ　5	ウ　5	エ　6	オ　3
2	カ　4	キ　0	ク　7	ケ　4	
3	コ　9	サ　0	シ　3	ス　1	セ　5
4	ソ　2	タ　0			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。